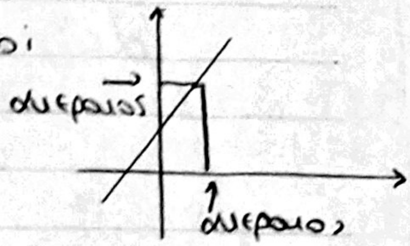
sos

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4/11/2016

$ax+by=c$ με $a,b,c \in \mathbb{Z}$ γνωστοί
$x,y \in \mathbb{Z}$ άγνωστοι



πχ Να λυθεί η $5x+10y=3$

Έστω (x_0,y_0) λύση $\Leftrightarrow 5x_0+10y_0=3$

$$5 \mid 5(x_0+2y_0)=3$$

Θεώρημα

Η εξίσωση $ax+by=c$ με $a,b,c \in \mathbb{Z}$ έχει ακέραιες λύσεις αν $(a,b)\mid c$. Αν (x_0,y_0) είναι μία λύση τότε όλες οι λύσεις της δίνονται από $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{a}{d}t$, $t\in\mathbb{Z}$ και $d=(a,b)$

Απόδειξη

Έστω $d=(a,b)$

"$\Rightarrow$" Αν έχει ακέραια λύση (x_0,y_0)
$ax_0+by_0=c \Rightarrow d\mid a,b \Rightarrow d \mid ax_0+by_0=c$

"$\Leftarrow$" Γνωρίζουμε ότι $d\mid c$
Αν είχαμε λύση $ax_0+by_0=c=dc'$
$a=da'$ και $b=d\cdot b'$ τότε $\cancel{d}(a'x_0+b'y_0)=\cancel{d}c'$

Συμπέρασμα: Αν $d=(a,b) \Rightarrow \exists\, x_0,y_0 \in \mathbb{Z}$ με
$d=ax_0+by_0$

$(a',b')=1 \Rightarrow 1=a'x_0'+b'y_0' \Rightarrow$

$$c' = a'(c'x_0') + b'(c'y_0')$$

$$dc' = da'(c'x_0') + db'(c'y_0') \Leftrightarrow$$

$$c = a(c'x_0') + b(c'y_0')$$

Άρα, υπάρχει λύση.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση και έχουμε βρει μια (x_0, y_0).
Θα δείξουμε ότι όλες είναι οι ζητούμενες.

<u>Δοκιμή</u>

$$ax_0 + \frac{ab}{d}t + by_0 - \frac{ba}{d}t = c$$

Έστω (x', y') μια άλλη λύση

$$\left.\begin{matrix} ax_0 + by_0 = c \\ ax' + by' = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a(x_0 - x') + b(y_0 - y') = 0$$

$$da'(x_0 - x') = db'(y' - y_0)$$
$$(a', b') = 1$$

Άρα $a' \mid y' - y_0$ και $b' \mid x_0 - x'$

$\Downarrow$

$$\exists t : y' - y_0 = a' \cdot t \Rightarrow y' = y_0 - a'(-t)$$

Θα το βάλουμε στην αρχική και

$$x' = x_0 + b't$$

Δηλαδή $x' = x_0 + \frac{b}{d}t$ και $y' = y_0 - \frac{a}{d}t$

Π.χ Να λυθεί αν λύνεται
$$1876x + 365y = 13$$

1ο Βήμα $(1876, 365) = (365, 51) = (51, 8) = (8, 3) = (3, 2) = (2, 1) = 1$

$$\begin{array}{r|l} 1876 & 365 \\ \hline 1825 & 5 \\ 51 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 365 & 51 \\ \hline 357 & 7 \\ 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 51 & 8 \\ \hline 48 & 6 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 6 & 2 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$1876 = 5 \cdot 365 + 51 \Rightarrow 1876 - 5 \cdot 365 = 51$
$365 = 7 \cdot 51 + 8 \Rightarrow 8 = 365 - 7 \cdot 51$
$51 = 8 \cdot 6 + 3 \Rightarrow 3 = 51 - 8 \cdot 6$
$8 = 2 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 2 = 8 - 2 \cdot 3$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (8 - 2 \cdot 3) = 3 - 8 + 2 \cdot 3 = -8 + 3 \cdot 3 = \\ &= -8 + 3 \cdot (51 - 8 \cdot 6) \\ &= -8 + 3 \cdot 51 - 18 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 51 - 19 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 51 - 19(365 - 7 \cdot 51) \\ &= 10 \cdot 51 - 19 \cdot 365 \\ &= 10(1876 - 5 \cdot 365) - 19 \cdot 365 = \\ &= 10 \cdot 1876 - 69 \cdot 365 \end{aligned}$$

$(1876, 365) = 1 \mid 13 \Rightarrow$ έχουμε λύση

Βρες μια λύση: Την βρήκα

$1 = 10 \cdot 1876 - 69 \cdot 365$
$13 = 130 \cdot 1876 + (365)(-69 \cdot 13)$

Μια λύση $(130, -69 \cdot 13)$

Γενική λύση: $x = 130 + \frac{365}{1} \cdot t \quad y = -897 - \frac{1876}{1} \cdot t$

SOS

Έχουν πέσει σε εξετάσεις παρόμοιες

18/11/2016

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ Α
Ασκήσεις #1

1) Δείξτε ότι $1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) Δείξτε ότι $9 \mid 10^n+3\cdot 4^{n+2}+5$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) α) Δείξτε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το 3.

β) Αν $x,y\in\mathbb{Z}$ και $2\nmid xy$, τότε $2\mid x^2+y^2$ και $4\nmid x^2+y^2$.

γ) Κάθε φυσικός a είναι της μορφής:
2^n ή $2^n(2\kappa+1)$ για $n\in\mathbb{N}$ και $\kappa\in\mathbb{N}^*$

SOS 4) α) Αν ο 2^n+1 είναι πρώτος, τότε ο n είναι δύναμη του 2.

β) Αν ο 2^n-1 είναι πρώτος, τότε ο n είναι πρώτος.

5) $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε $5\mid 3\cdot 7^n+2\cdot 2^n$

6) Αν ο a διαιρεί τους $12n+5$ και $4n+2$, τότε $a=\pm 1$

7) Δεν υπάρχει ακέραιος $8n+7$ με $n\in\mathbb{Z}$ ώστε να είναι άθροισμα τριών τετραγώνων.

8) Αν $a_1=1=a_2$ και $a_{\nu+2}=a_{\nu+1}+a_\nu$ για $\nu\geq 1$, τότε ισχύει

α) $a_2+a_4+\dots+a_{2\nu}=a_{2\nu+1}-1$

β) $a_3+a_6+\dots+a_{3\nu}=\frac{1}{2}(a_{3\nu+2}-1)$

γ) $a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2=a_\nu a_{\nu+1}$

δ) $a_{\nu+\kappa+1}=a_\nu a_\kappa+a_{\nu+1}a_{\kappa+1}$

Θεωρία Αριθμών
Ασκήσεις #1

Άσκηση 1: Δείξτε ότι $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Λύση

1º επαγωγικό βήμα: Για $n=1$: $\frac{1(1+1)(1+2)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1$, $1=1$

Γενικό επαγωγ. βήμα: Υποθέτω ότι ισχύει για n
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$

$$1+3+6+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$$

$$=\frac{2n(n+1)(n+2)+6(n+1)(n+1)}{12}$$

$$=\frac{2(n+1)(n+2)(n+3)}{12}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Άσκηση 2 : Δείξτε ότι $9 / 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Λύση

Έστω $P(n) = 9 / 10^n + 3 4^{n+2} + 5$

1° επαγωγικό βήμα

για $n=0$: $P(0) = 10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 1 + 3 \cdot 16 + 5 = 54$ ισχύει

για $n=1$: $P(1) = 10^1 + 3 \cdot 4^3 + 5 = 207$ ισχύει

Θα δείξουμε ότι αν η $P(n)$ αληθής τότε και $P(n+1)$ αληθής δηλαδή

αν $9 / 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, τότε και $9 / 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+3} + 5, \forall n \in \mathbb{N}$

για $n+1$. $P(n+1) = 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+3} + 5$

$$= 10^n \cdot 10 + 3 \cdot 4^{n+2} \cdot 4 + 5$$

$$= 9 \cdot 10^n + 10^n + 3 \cdot 3 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$$

$$= 9 \underbrace{(10^n + 4^{n+2})}_{-} + P(n)$$

$$= 9(\ldots\ldots) ,$$ ισχύει

Άσκηση 3: α) Δείξτε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το 3.

β) Αν $x, y \in \mathbb{Z}$ και $2 \nmid xy$, τότε $2 \mid x^2+y^2$ και $4 \nmid x^2+y^2$

γ) Κάθε φυσικός a είναι της μορφής 2^n ή $2^n(2k+1)$ για $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}^*$

Λύση

α) Έστω 3 διαδοχικοί ακέραιοι $k, k+1, k+2$, $k \in \mathbb{Z}$
Θέτουμε το γινόμενο τους $A = k(k+1)(k+2)$, $k \in \mathbb{Z}$
Άρα, να δειχθεί ότι $3 \mid A$

Σύμφωνα με την ευκλείδεια διαίρεση υπάρχουν q, r ώστε $k = q_n + r$ με $0 \leq r \leq n-1$.

Άρα $k = 3q + r$ με $0 \leq r \leq 2$

Για τις τιμές του r οι τρεις ακέραιοι γίνονται

Για $r=0$: $k = 3q \Rightarrow 3 \mid A$

Για $r=1$: $k = 3q+1$, $k+1 = 3q+2$, $k+2 = 3q+3$
άρα $3 \mid 3(q+1)$

Για $r=2$: $k = 3q+2$, $k+1 = 3q+3$
$3 \mid 3(q+1) = k+1 \Rightarrow 3 \mid A$

β) Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$

Αν $2 \nmid x \cdot y$ τότε $2 | x^2+y^2$, $4 \nmid x^2+y^2$

$\Downarrow$

$x = 2k+1$

$y = 2\lambda+1$

$x^2+y^2 = (2k+1)^2 + (2\lambda+1)^2 =$

$= 4k^2 + 4k + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$

$= 4(k^2 + k + \lambda^2 + \lambda) + 2$

άρα $2 | 2(2(k^2+k+\lambda^2+\lambda)+1) = x^2+y^2$

γ) $x^2+y^2 = 4\mu + 2$

Έστω ότι $4 | x^2+y^2$

$\Rightarrow 4 | 4\mu + 2$

$\Rightarrow 4 | 4\mu$

$\Big\} \Rightarrow 4 | (4\mu+2) - 4\mu \Rightarrow 4 | 2$

άτοπο.

Άσκηση 4

$a \in \mathbb{N}$ $\quad a \neq 0 \quad$ άρτιος $a = 2 \cdot 2a_2$

$a \to$ άρτιος $a = 2a_1$

$\quad\quad \to$ άρτιος $a = 2 \cdot 2a_2$

$\quad\quad \to$ περιττός $a = 2(2k+1)$

$a \to$ περιττός $a = 2k+1$

Βρες τη μέγιστη δύναμη του 2^n η οποία διαιρεί το a

$$a = 2^n (\text{περιττός}) = 2^n(2k+1)$$

Άσκηση 5 : $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $5 \mid 3\cdot 7^n + 2\cdot 2^n$

Λύση

$5 \mid 3\cdot 7^n + 2\cdot 2^n = P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(0)$ $\quad 5 \mid 3\cdot 7^0 + 2\cdot 2^0 = 5$

$P(1)$ $\quad 5 \mid 3\cdot 7^1 + 2\cdot 2^1 = 25$

Υποθέτουμε για n : $5 \mid 3\cdot 7^n + 2\cdot 2^n$

Θα δείξουμε ότι για $n+1$: $5 \mid 3\cdot 7^{n+1} + 2\cdot 2^{n+1} =$

$$= 3\cdot 7\cdot 7^n + 2\cdot 2\cdot 2^n$$
$$= 21\cdot 7^n + 4\cdot 2^n =$$
$$= 18\cdot 7^n + 3\cdot 7^n + 2\cdot 2^n + 2\cdot 2^n =$$
$$= 3\cdot 7^n + 15\cdot 7^n + 3\cdot 7^n + 2\cdot 2^n + 2\cdot 2^n$$
$$= 15\cdot 7^n + P(n) + P(n)$$

Κάθε όρος διαιρείται με το 5.
Άρα και το άθροισμα.

Άσκηση 6: Αν ο α διαιρεί τους $12n+5$ και $4n+2$, τότε $\alpha=\pm1$

Λύση

$\alpha \mid 12n+5$ και $4n+2 \Rightarrow \alpha = ;$

$\alpha \mid (12n+5,\ 4n+2) = (12n+5-3(4n+2),\ 4n+2) =$

$(\alpha,\beta) = (\alpha \pm x\beta,\ \beta)$

$= (-1,\ 4n+2) = 1$

άρα $\alpha \mid 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$.